# Bemerkung zu einem Satz von G. Alexits

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

G. ALEXITS hat den folgenden Satz bewiesen [1]):

*Bezeichne* $\{c_n\}$ *eine positive Zahlenfolge mit konvergentem* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$, *für die die Ungleichungen*

$$(1)\qquad \sqrt{n}\, c_n \geqq \sqrt{n+1}\, c_{n+1} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

*und*

$$(2)\qquad n^2 c_n^2 \leqq (n+1)^2 c_{n+1}^2 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

*gelten. Ist die Orthogonalreihe*

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

*im Grundintervall* $[a,b]$ *fast überall zur Funktion* $f(x)$ *Abelsch summierbar und gilt*

$$(4)\qquad a_n^2 = O(c_n^2),$$

*so besteht für jede Indexfolge* $\{\nu_m\}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_m < \cdots)$ *bei jedem* $\alpha > \frac{1}{2}$:

$$\sum_{m=1}^{n} [f(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)]^2 = o(n)$$

*fast überall, wo* $\sigma_m^{(\beta)}(x)$ *das m-te* $(C,\beta)$*-Mittel der Reihe* (3) *bezeichnet.*

In dieser Note werden wir beweisen, daß *die Behauptung dieses Satzes auch ohne die Bedingung* (2) *gilt.* Für $\alpha = 1$ habe ich dieses Resultat schon früher erhalten. [2])

[1]) G. ALEXITS, Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 127—129.

[2]) K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. IV (Starke Summation.), *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 18—25.

Beweis. Ist die Reihe (3) fast überall nach der Funktion $f(x)$ Abelsch summierbar, so folgt aus einem Satz von A. ZYGMUND, daß $\lim_{m\to\infty} \sigma_m^{(\beta)}(x) = f(x)$ fast überall[3]) ($\beta>0$), somit gilt für eine beliebige Indexfolge $\{\nu_m\}$

$$\sum_{m=1}^{n} [f(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\beta)}(x)]^2 = o(n) \qquad (\beta > 0) \tag{5}$$

fast überall. Also haben wir die Behauptung nur für den Fall $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ zu beweisen. Da

$$\sum_{m=1}^{n} [f(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)]^2 \leqq 2\sum_{m=1}^{n} [f(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2 + 2\sum_{m=1}^{n} [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x)]^2$$

gilt, haben wir nach (5) nur zu zeigen, daß die letzte Summe fast überall die Größenordnung $o(n)$ hat. Nun ist aber

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_a^b [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2 \, dx = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(A_{\nu_m}^{(\alpha)})^2} \sum_{k=1}^{\nu_m} (A_{\nu_m-k}^{(\alpha-1)})^2 k^2 a_k^2, \tag{6}$$

wo $A_m^{(\beta)}$ den $m$-ten Binomialkoeffizienten $\beta$-ter Ordnung bedeutet. Es gibt bekanntlich von $m$ unabhängige, positive Konstanten $C_1, C_2$ derart, daß $C_1(m+1)^\beta \leqq A_m^{(\beta)} \leqq C_2(m+1)^\beta$ ($\beta > -1$; $m = 0, 1, \ldots$) ist, folglich gilt wegen (4) und $\nu_m \geqq m$ ($m = 1, 2, \ldots$)

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(A_{\nu_m}^{(\alpha)})^2} \sum_{k=1}^{\nu_m} (A_{\nu_m-k}^{(\alpha-1)})^2 k^2 a_k^2 = \\ &= O(1)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k^2 c_k^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=m}^{\nu_m} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k^2 c_k^2\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Wegen (1) ergibt sich

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=m}^{\nu_m} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k^2 c_k^2 \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2}{\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=m}^{\nu_m} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k. \tag{8}$$

Da wegen $\alpha > \frac{1}{2}$ und $\nu_m \geqq m$ ($m = 1, 2, \ldots$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{\nu_m} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k &= \sum_{l=1}^{\nu_m - m + 1} l^{2\alpha-2} (\nu_m - l + 1) = \\ &= O(1)\left(\sum_{l=1}^{\nu_m - m} l^{2\alpha-1} + m(\nu_m - m)^{2\alpha-1}\right) = O(\nu_m^{2\alpha}) \end{aligned}$$

[3]) A. ZYGMUND, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362.

gilt, so ist nach (8)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=m}^{\nu_m} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k^2 c_k^2 = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 < \infty. \tag{9}$$

Auf Grund der Ungleichungen $\alpha < 1$ und $\nu_m \geqq m$ $(m = 1, 2, \dots)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k^2 c_k^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2}}{m\nu_m^{2\alpha}} \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^2 \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(m-k+1)^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Da wegen $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(m-k+1)^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}} &= \sum_{m=k}^{2k-1} \frac{(m-k+1)^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}} + \sum_{m=2k}^{\infty} \frac{(m-k+1)^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}} \leqq \\ &\leqq \frac{1}{k^{2\alpha}} \sum_{l=1}^{k} l^{2\alpha-2} + 2^{2-2\alpha} \sum_{m=2k}^{\infty} \frac{m^{2\alpha-2}}{m^{2\alpha}} = O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

besteht, so gilt nach (10)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\nu_m^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} (\nu_m - k + 1)^{2\alpha-2} k^2 c_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty. \tag{11}$$

Auf Grund von (6), (7), (9) und (11) ergibt sich mit Anwendung des Satzes von B. Levi, daß die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2$$

fast überall konvergiert, woraus sich nach einem oft verwendeten Kroneckerschen Lemma fast überall

$$\sum_{m=1}^{n} [\sigma_{\nu_m}^{(\alpha-1)}(x) - \sigma_{\nu_m}^{(\alpha)}(x)]^2 = o(n)$$

ergibt.

Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

*(Eingegangen am 18. September 1959)*